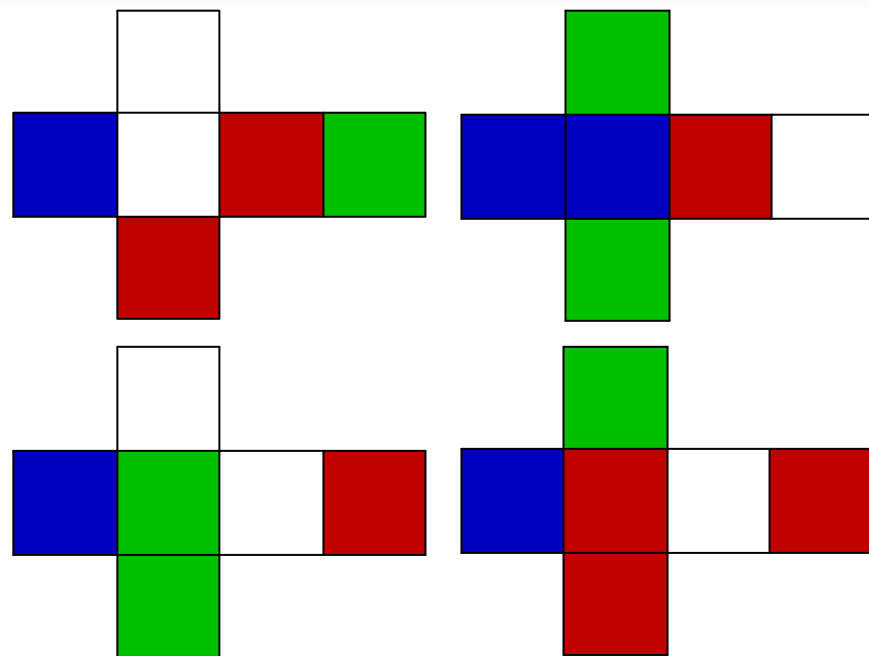
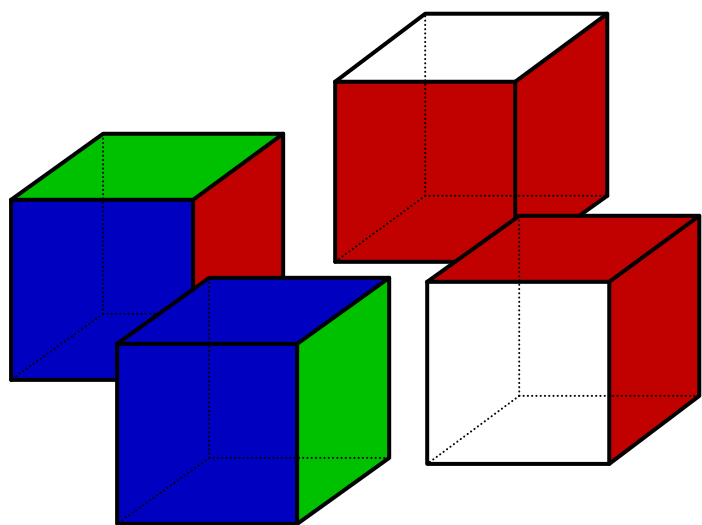
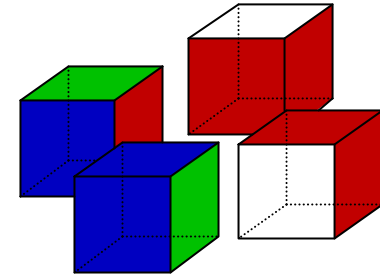


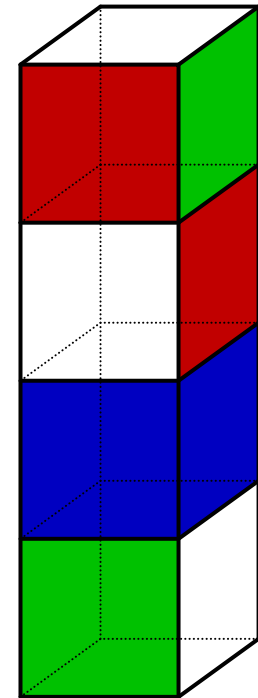
# 四塊積木 遊戲分析



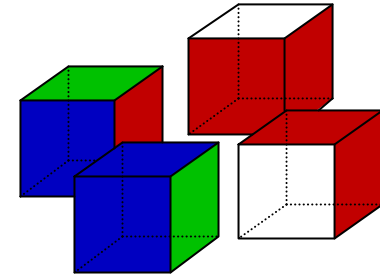
# 四塊積木問題



四塊積木的問題是由表面塗上紅、白、藍、綠四種顏色的四個正立方體積木所構成的。在每一塊積木塗顏色的形式都不一樣之情況下，能不能將這四塊積木疊在一起，使得每一個側面都出現四種不同的顏色。即，每個側面都有一個白色、一個紅色、一個藍色、一個綠色。

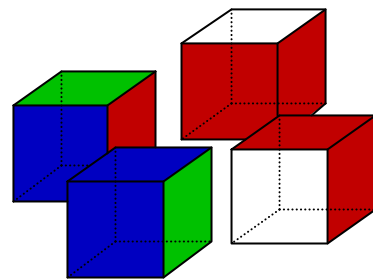


# 四塊積木問題



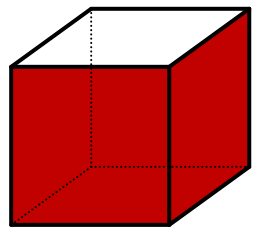
如同許多組合性的益智遊戲，對於這個看似簡單的問題，若盲目的拼拼湊湊，或許在不經意的時候，我們恰巧可以拼出一種解答，可是，我們難免會質疑：它是不是唯一的解答呢？還是存在有更多未被發現的解答？它共有多少組解答呢？

# 四塊積木組件編號

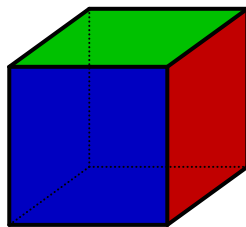


要研究這個問題，我們必須了解它組成元素的特性。所以首要的工作不是盲目地拼湊，而是分析組件。

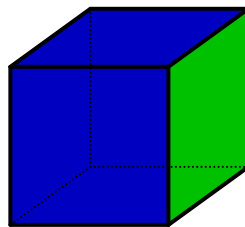
為了記錄方便，我們將這四塊積木編號如下：



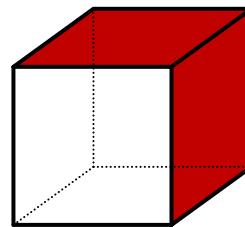
(甲)



(乙)

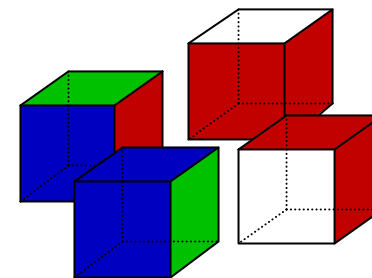


(丙)

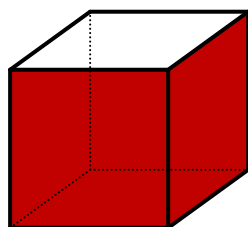


(丁)

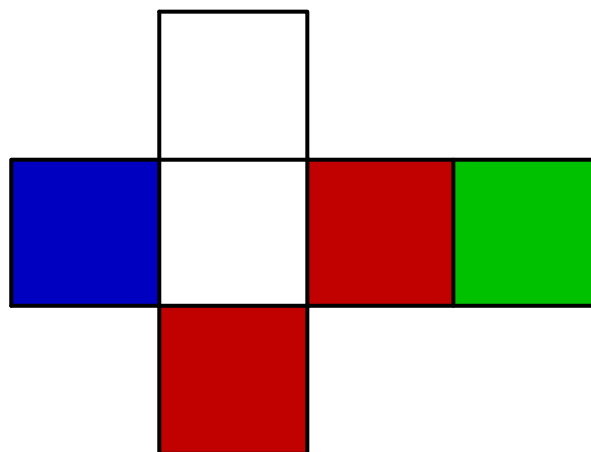
# 甲 積木之分析



視圖

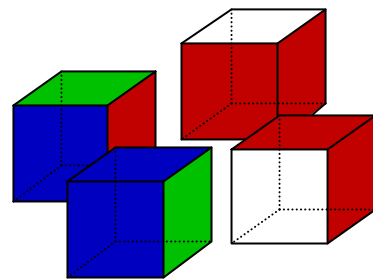


展開圖

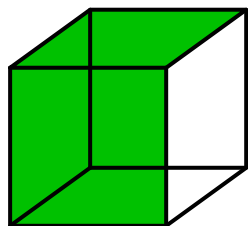


顏色	數量
紅色	2
藍色	1
綠色	1
白色	2

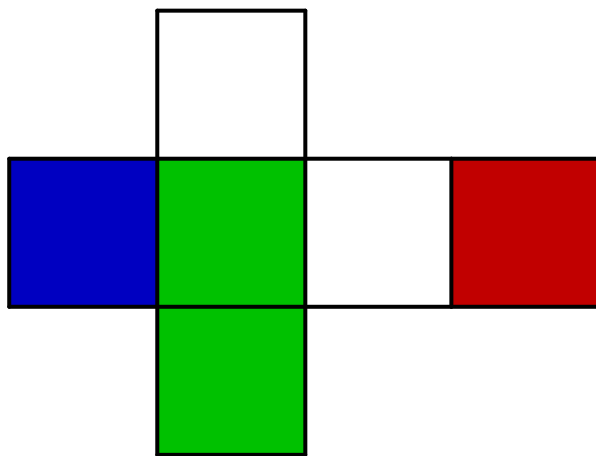
## 乙 積木之分析



視圖

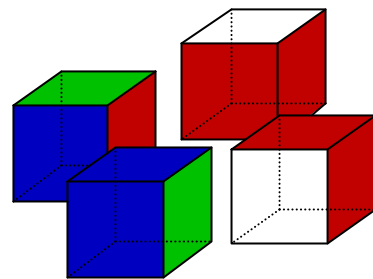


展開圖

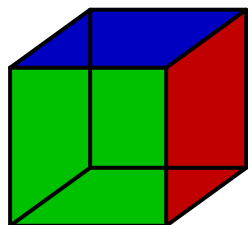


顏色	數量
橘色	1
藍色	1
綠色	2
白色	2

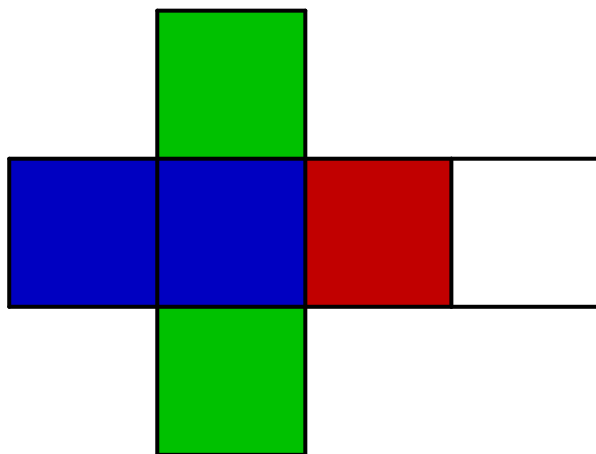
## 丙 積木之分析



視圖

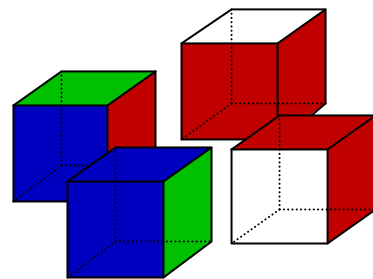


展開圖

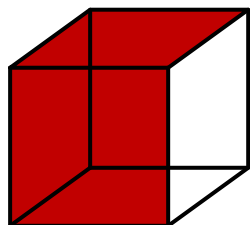


顏色	數量
紅色	1
藍色	2
綠色	2
白色	1

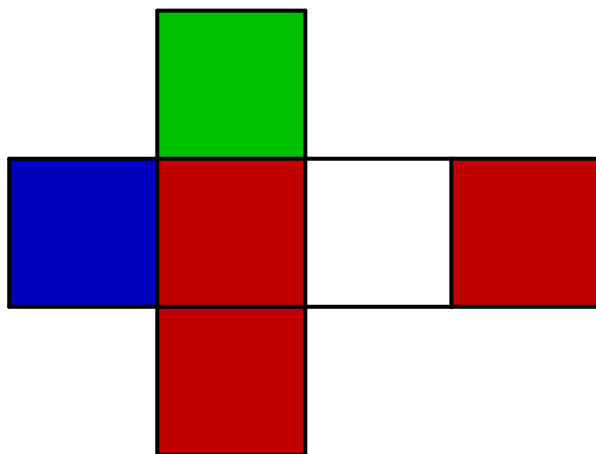
# 丁 積木之分析



視圖



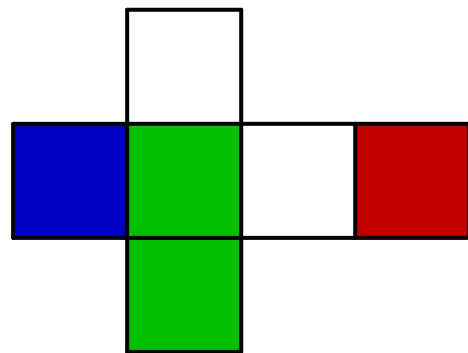
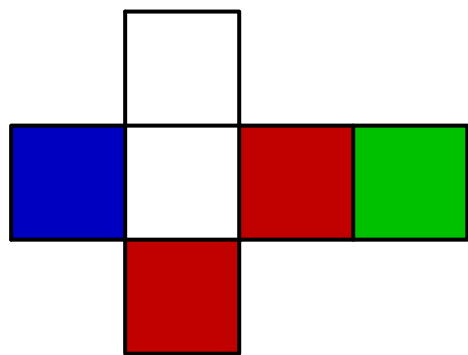
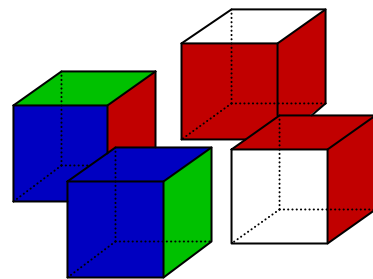
展開圖



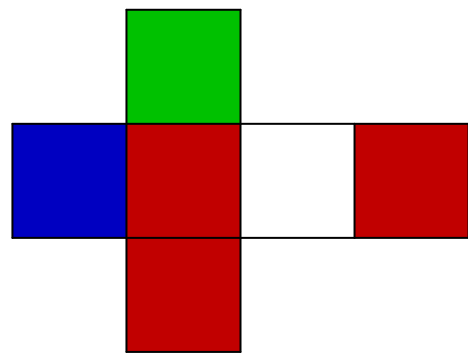
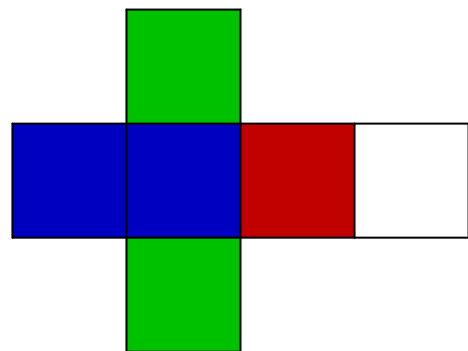
顏色	數量
紅色	3
藍色	1
綠色	1
白色	1



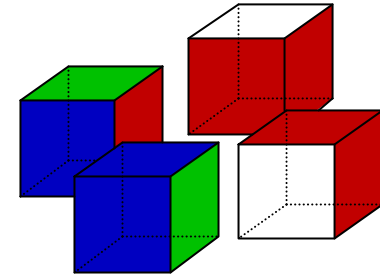
# 四塊積木之分析



顏色	數量
紅色	7
藍色	5
綠色	6
白色	6



# 發現事實

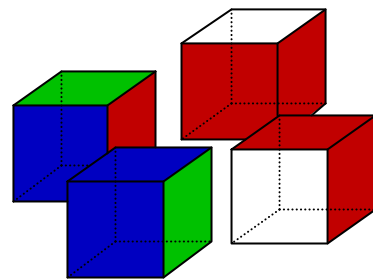


除了四種顏色在側面各出現四次之外，  
我們還有下面的觀察心得：

- a. 每個立方體都會有二個面不會出現在側面。(即上、下平行的兩個面)
- b. 每次翻轉，立方體上互相平行兩個面的顏色必是同步變動。

因此我們可以分析出每一種顏色出現在上下位置的次數。

# 顏色出現的次數

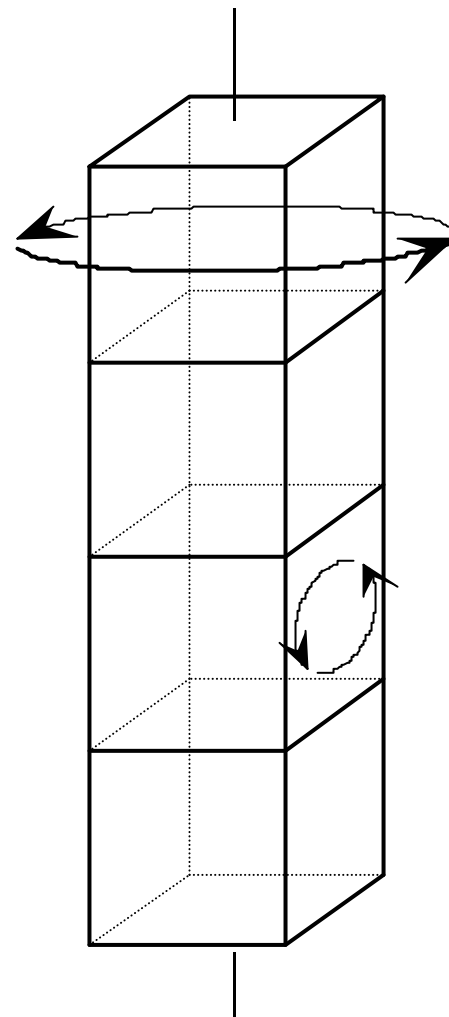
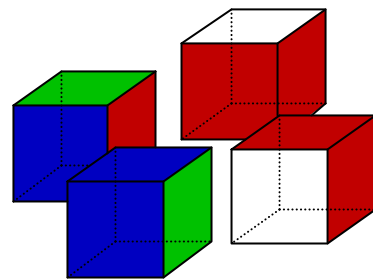


顏色 類別				
顏色總數量	7	6	5	6
成功堆疊時 側面顏色數量	4	4	4	4
在上下位置 之顏色數量	3	2	1	2

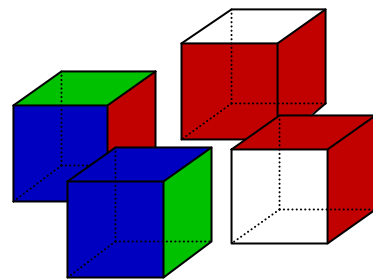
# 簡化問題、步步逼近

因為完成堆疊後的長方體在不翻轉立方體的情況下，任意調換立方體的上下次序，都不影響解答。所以，可以考慮由上至下依甲乙丙丁的順序來操作。

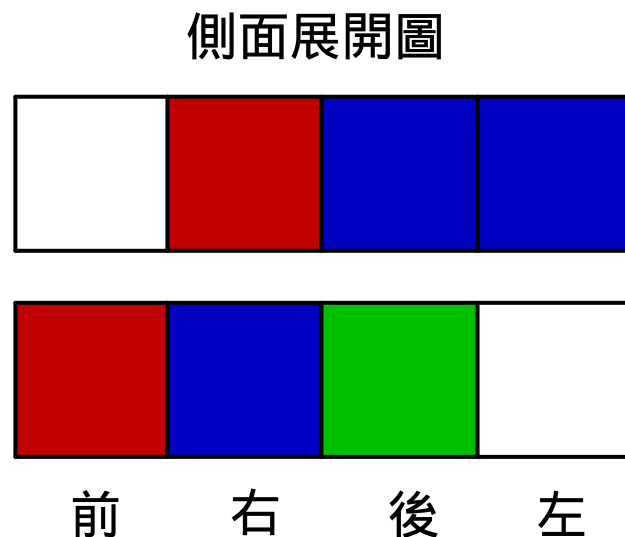
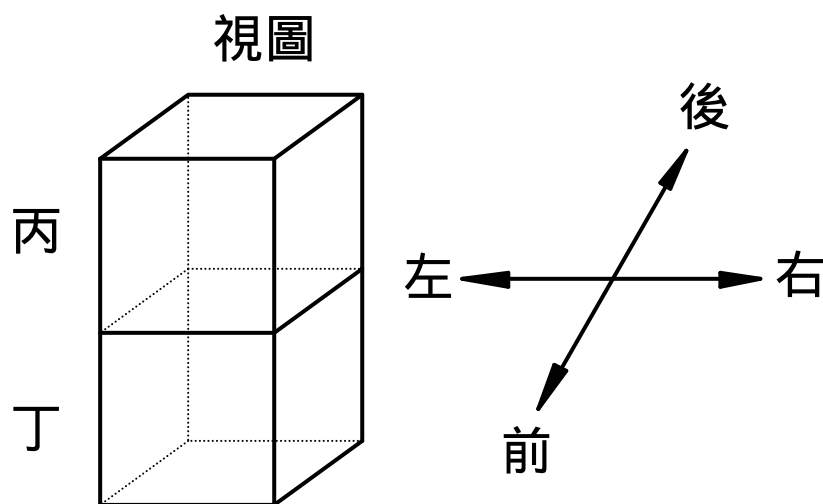
我們發現：堆疊時並不須要將四塊積木所在的位置改變，也就是說四塊積木的上下次序不必變動。我們只須對每一個塊積木在原地繞長方體的中心軸旋轉，或將某一塊積木上下顛倒後繞長方體的中心軸旋轉。



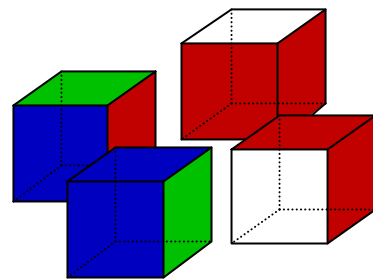
## 二 個積木的堆疊



我們隨意拿二個積木來作堆疊，就以積木丙與丁來說，下面是可能的一種堆疊方式，當然這二個積木可能還有其它的成功組合使得長方體的側面都出現二種不同顏色的組合。



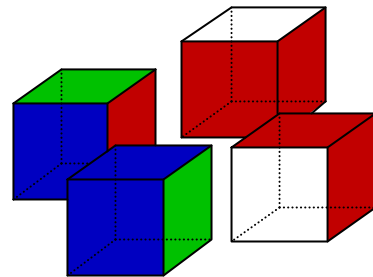
## 三個積木的堆疊



針對前述積木丙、丁堆疊成功的情況來嘗試三個積木的堆疊，將乙積木往上堆疊，看看是否能堆疊成功。我們發現有4種不同的方式，使得每個側面都出現三種不同的顏色。

乙	<table><tr><td>綠</td><td>白</td><td>紅</td><td>綠</td></tr><tr><td>白</td><td>紅</td><td>藍</td><td>藍</td></tr><tr><td>紅</td><td>藍</td><td>綠</td><td>白</td></tr></table>	綠	白	紅	綠	白	紅	藍	藍	紅	藍	綠	白	<table><tr><td>綠</td><td>綠</td><td>白</td><td>紅</td></tr><tr><td>白</td><td>紅</td><td>藍</td><td>藍</td></tr><tr><td>紅</td><td>藍</td><td>綠</td><td>白</td></tr></table>	綠	綠	白	紅	白	紅	藍	藍	紅	藍	綠	白
綠	白	紅	綠																							
白	紅	藍	藍																							
紅	藍	綠	白																							
綠	綠	白	紅																							
白	紅	藍	藍																							
紅	藍	綠	白																							
丙																										
丁																										
乙	<table><tr><td>藍</td><td>綠</td><td>白</td><td>紅</td></tr><tr><td>白</td><td>紅</td><td>藍</td><td>藍</td></tr><tr><td>紅</td><td>藍</td><td>綠</td><td>白</td></tr></table>	藍	綠	白	紅	白	紅	藍	藍	紅	藍	綠	白	<table><tr><td>藍</td><td>白</td><td>白</td><td>綠</td></tr><tr><td>白</td><td>紅</td><td>藍</td><td>藍</td></tr><tr><td>紅</td><td>藍</td><td>綠</td><td>白</td></tr></table>	藍	白	白	綠	白	紅	藍	藍	紅	藍	綠	白
藍	綠	白	紅																							
白	紅	藍	藍																							
紅	藍	綠	白																							
藍	白	白	綠																							
白	紅	藍	藍																							
紅	藍	綠	白																							
丙																										
丁																										

## 積木 丙與丁 的堆疊

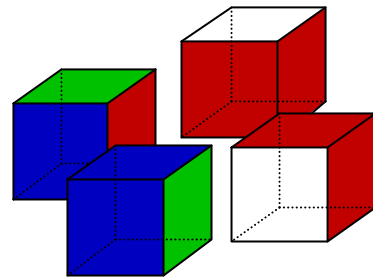


上述的結果不禁令我們懷疑：

是否丙、丁二個積木其它成功的堆疊的方式也都可以造成三個積木堆疊成功？

於是，我們先針對丙、丁堆疊成功的情形討論，之後再拿積木乙來組合出三個積木的情況。

## 積木 丙與丁 的堆疊



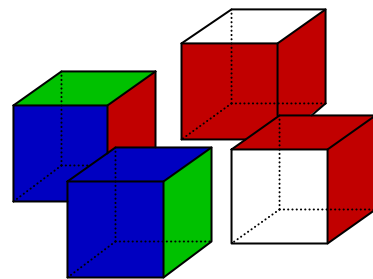
經過進一步分析丙、丁積木堆疊成功的可能情形，結果我們發現共有**20**種成功的情形。

**質疑：**這些堆疊成功的情形中，加入乙積木後，是否會產生更多組可能的情形或者能夠逐一剔除不合條件的情形。

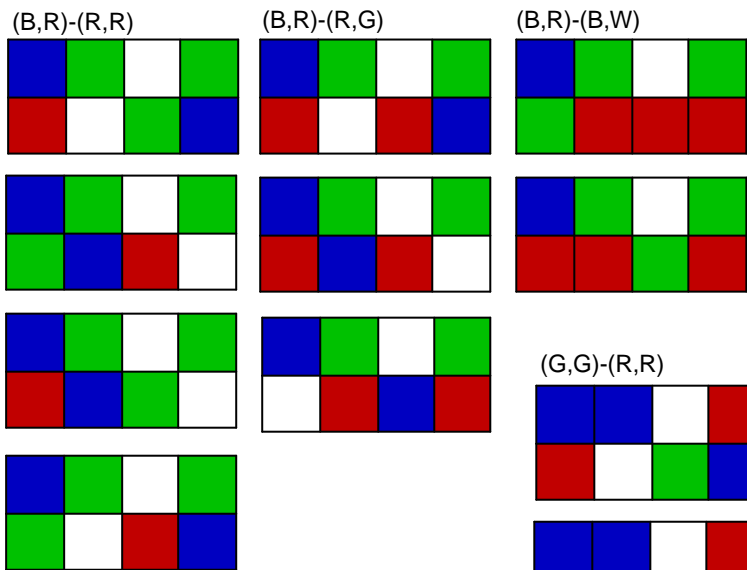
以下我們列出積木丙與丁的**20**種成功的組合(側面展開圖)。



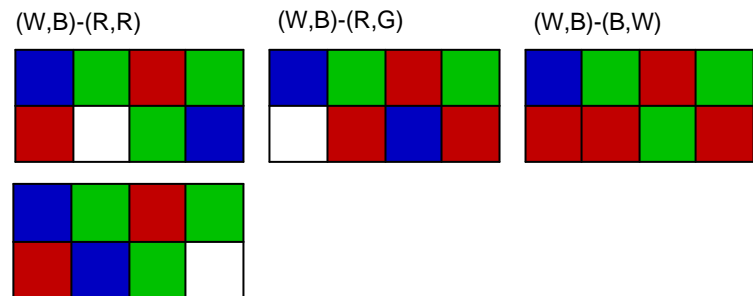
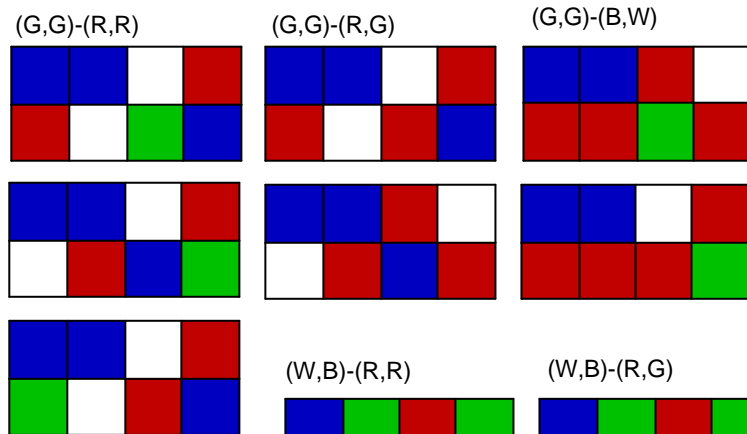
# 積木 丙與丁 的堆疊



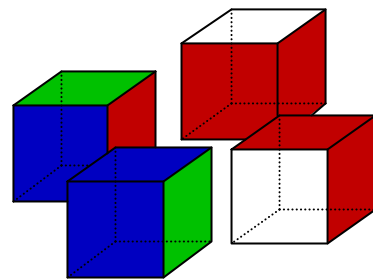
丙  
丁



以 (B,R) - (R,R) 表示二堆疊積木上下的平行面。

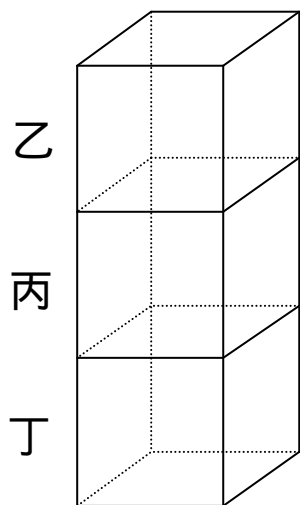


# 積木 乙丙丁 的堆疊

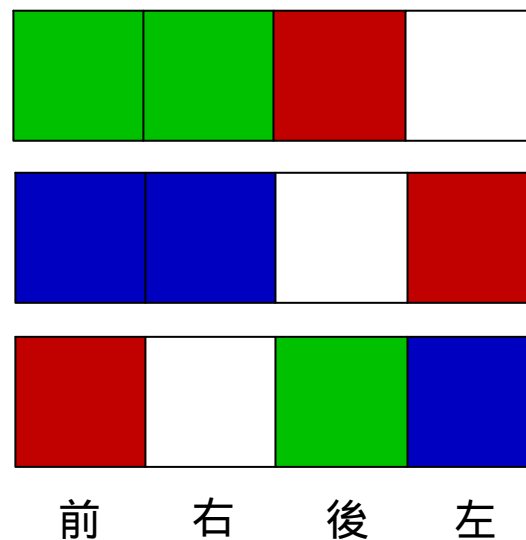


逐一將丙丁組合成功的 20 種情形個別拿來當作基底，加入乙積木(如下圖)。我們發現成功的情形更多了，共有 47 種。

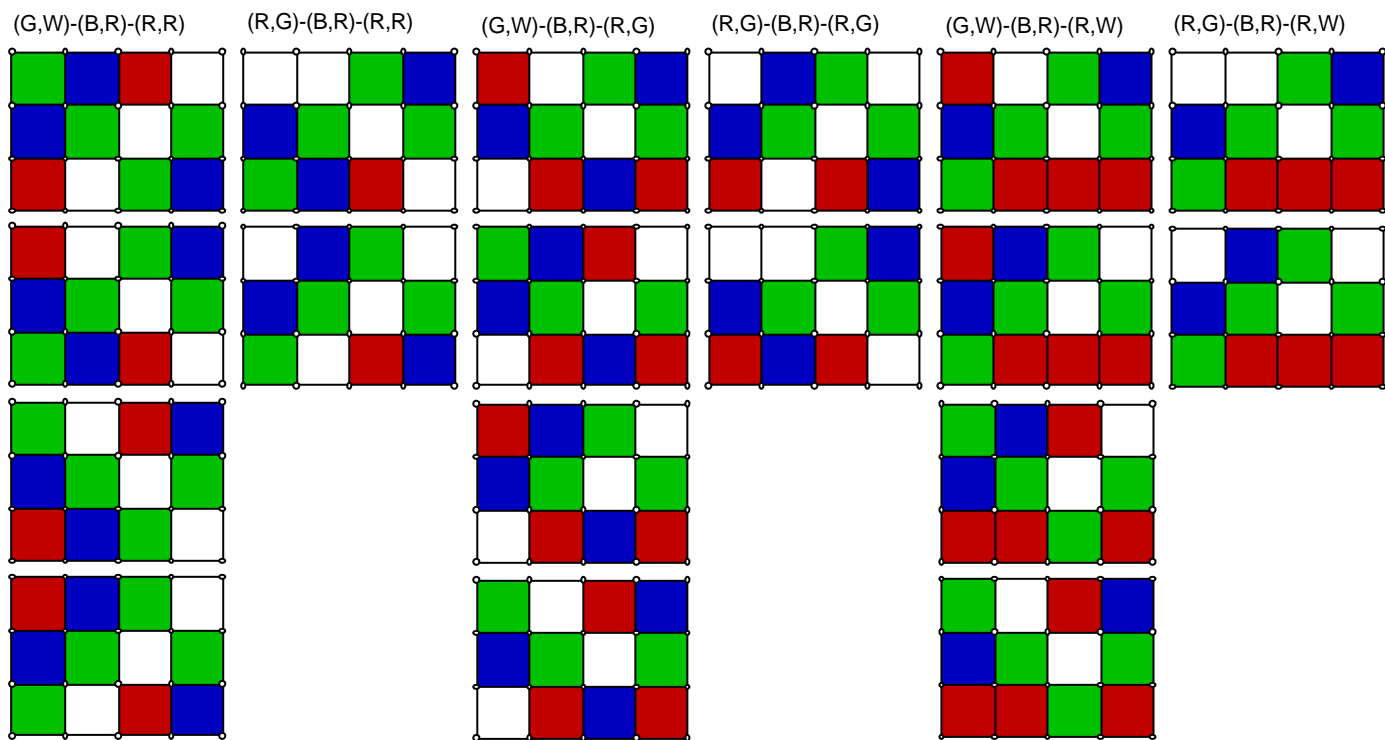
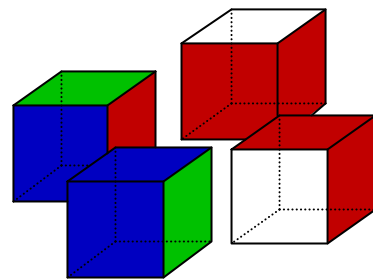
視圖



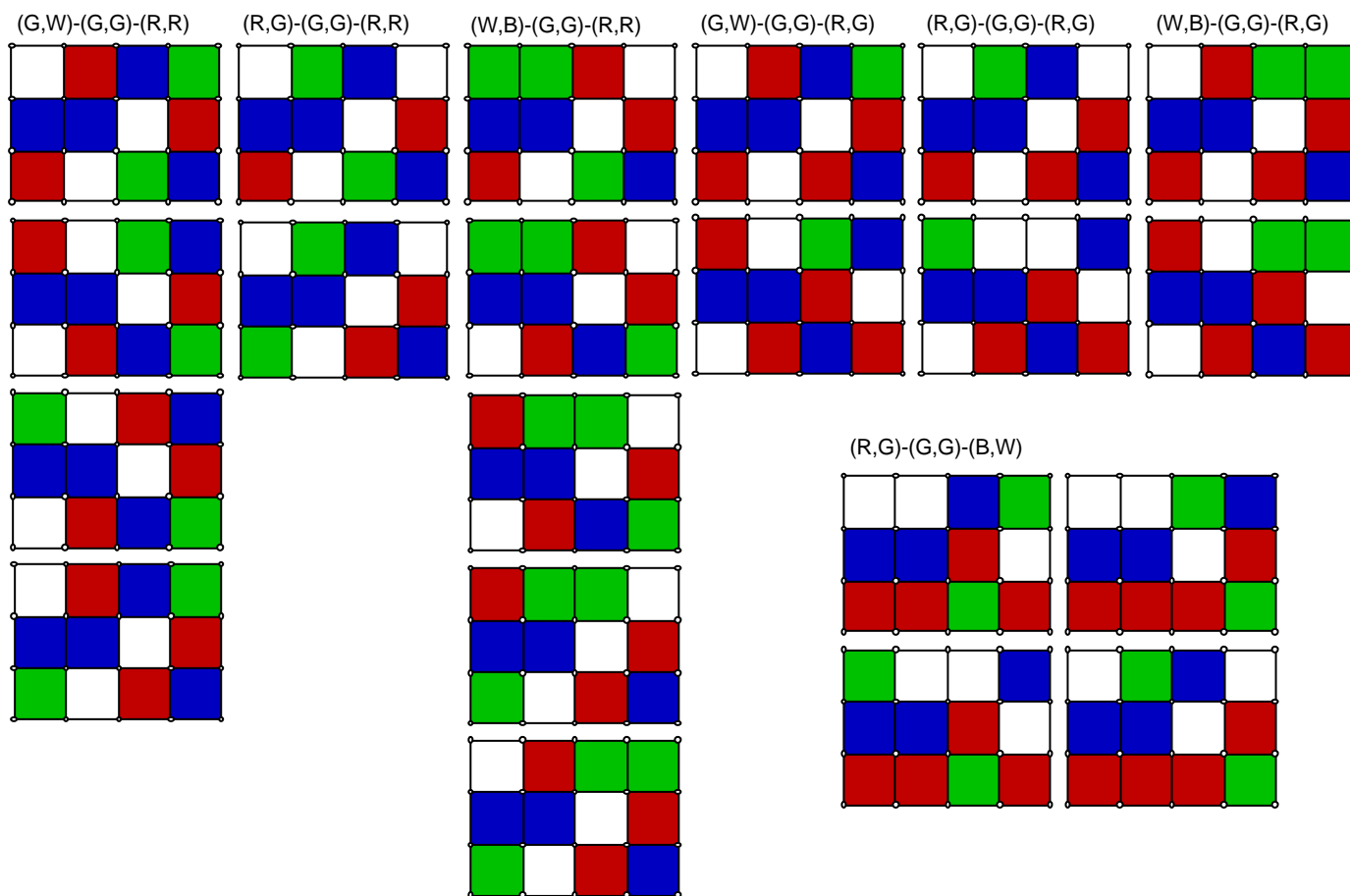
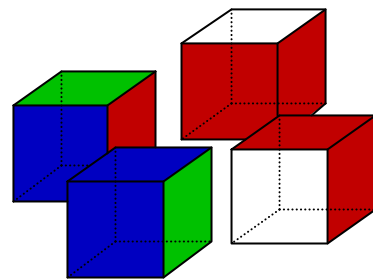
側面展開圖



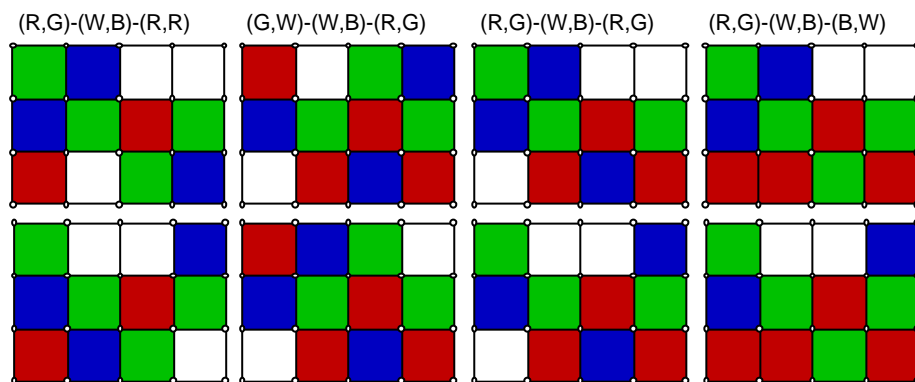
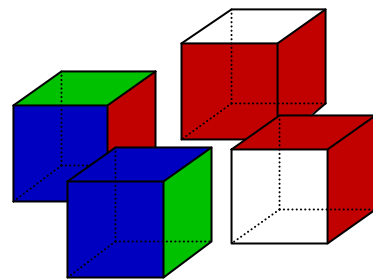
# 積木 乙丙丁 的堆疊



# 積木 乙丙丁 的堆疊

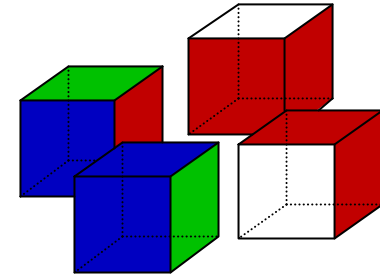


# 積木 乙丙丁 的堆疊



我們發現：雖然我們完成47種三塊積木堆疊的情形，但是卻耗費很多時間來操作。面對第四塊積木，若採用相同方法，勢必又要額外的時間，至此，我們不禁懷疑是否有一種更好的方法可以解決這個問題。

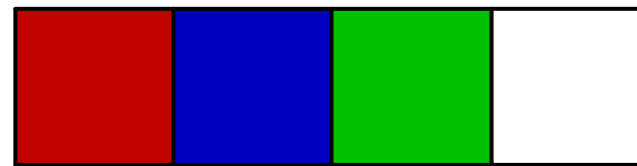
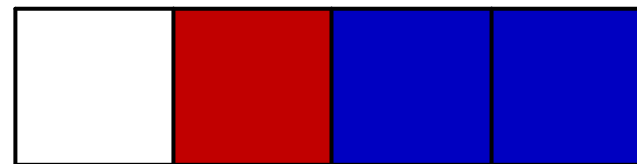
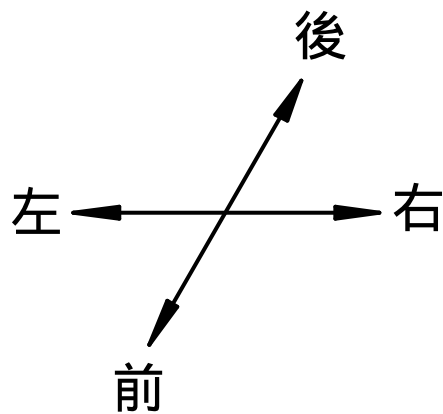
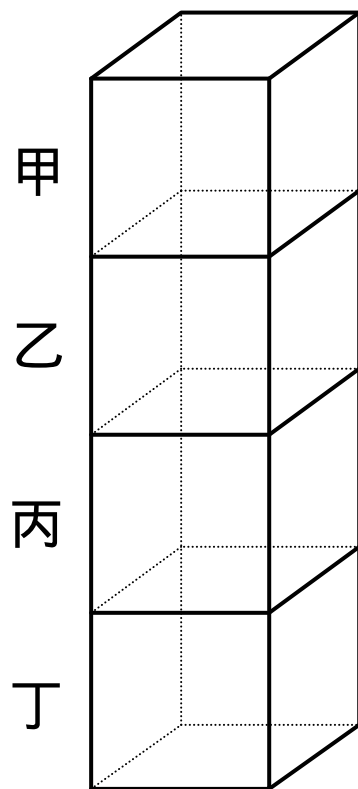
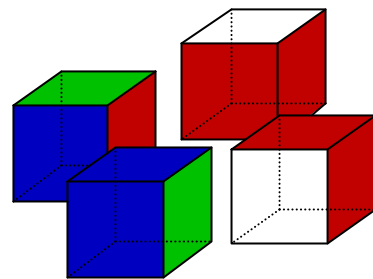
## 四塊積木之堆疊



想像在這三塊積木上面加上第四塊積木“甲”，應該會有不少的情況可以搭成題目所要的結果，但是，事實卻非如此，面對著三塊積木共47種堆疊成功的情形，最後的答案卻獨獨只有一個是成功的。（見下頁）

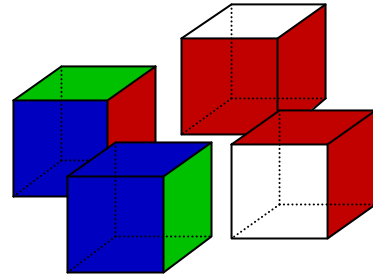
換句話說，只有一種堆疊方式可以使每個側面都出現四種不同的顏色。

# 四塊積木之堆疊



前 右 後 左

# 如何減少操作次數



費了九牛二虎之力，為了解決這個問題，卻忽略了我們之前所提到的事實：

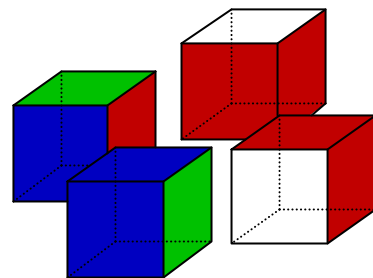
一個成功堆疊的積木柱作側面展開圖，可發現四種顏色各出現四次。

四種顏色在側面出現的次數與在上下位置出現的次數對整個問題分析有相當的重要性。

看看以下的分析：

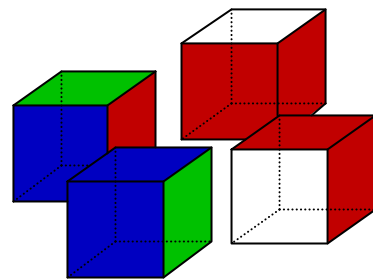


# 顏色出現的次數



顏色 類別				
顏色總數量	7	6	5	6
成功堆疊時 側面顏色數量	4	4	4	4
放置在上下位 置之顏色數量	3	2	1	2

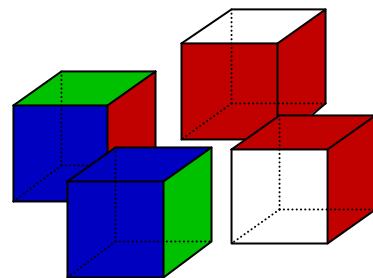
# 顏色出現的次數



若我們分別以數值1000、100、10及1來表示四種顏色：紅、綠、藍及白，我們可以發現對每一種成功堆疊的長方體而言，每個側面顏色的數值和都是1111，而在上下位置各面顏色的數值和必須是3212。

顏色 類別				
放置在上下位置 之顏色數量	3	2	1	2
放置在上下位置 之顏色數值和	$3 \times 1000 + 2 \times 100 + 1 \times 10 + 2 \times 1 = 3212$			

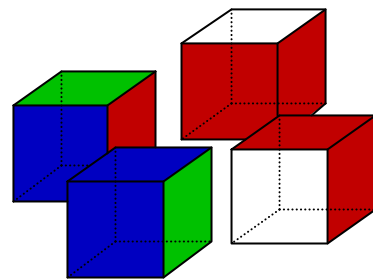
# 分組討論



利用顏色分析，把每一塊積木的顏色分成三組（互相平行的兩個面當成同一組），則每一組將同時出現在側面或同時不在側面。分組如下：

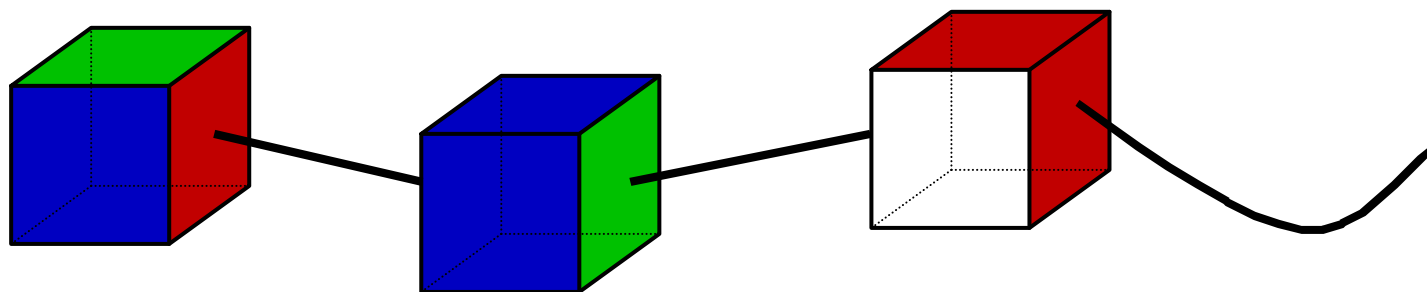
甲	乙	丙	丁
(白, 綠)	(綠, 白)	(藍, 紅)	(紅, 紅)
(紅, 藍)	(紅, 綠)	(綠, 綠)	(紅, 綠)
(白, 紅)	(白, 藍)	(白, 藍)	(藍, 白)

# 成功的組合

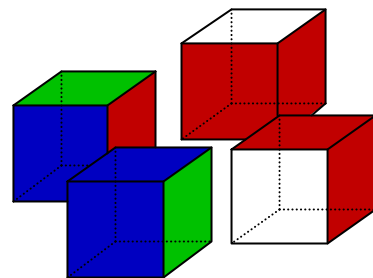


利用顏色次數表、分組表及出現在上下位置的正方形面數值和必須是3212，可得到四種不同的情形，它們都是有可能成功的：

我們用線段連接的部份，是表示放在上、下兩面的部份，也就是不出現在側面的那些面。這些面的數值和等於3212。



# 成功的組合



紅:1000, 綠:100, 藍:10, 白: 1

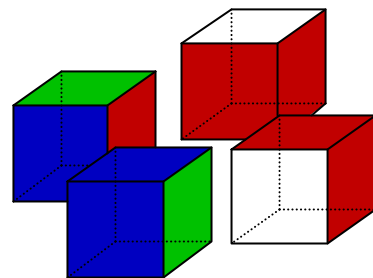
	甲	乙	丙	丁	
A	(白, 綠)	(綠, 白)	(藍, 紅)	(紅, 紅)	→ O
B	(紅, 藍)	(紅, 綠)	(綠, 綠)	(紅, 綠)	
C	(白, 紅)	(白, 藍)	(白, 藍)	(藍, 白)	→ X

舉例來說：(A, 甲)、(B, 乙)、(C, 丙)及(C, 丁)的組合數值和為

$$\text{紅} \times 1 + \text{綠} \times 2 + \text{藍} \times 2 + \text{白} \times 3 = 1223 \neq 3212$$

所以，這個情況不合乎要求。而(A, 甲)、(A, 乙)、(A, 丙)及(A, 丁)的組合，數值恰好滿足。

# 成功的組合

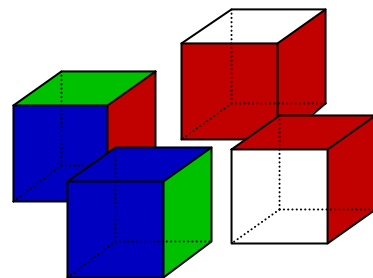


紅:1000, 綠:100, 藍:10, 白: 1

將分組表轉為數值表（如下表），利用數值和來分析，我們可以很快得出五種可能成功的堆疊方式。

	甲	乙	丙	丁
A	(1 , 100)	(100 , 1)	(10 , 1000)	(1000 , 1000)
B	(1000 , 10)	(1000 , 100)	(100 , 100)	(1000 , 100)
C	(1 , 1000)	(1 , 10)	(1 , 10)	(10 , 1)

# 成功的組合



紅:1000, 綠:100, 藍:10, 白: 1

前述數值表總共有  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$  種可能的組合，而這些組合的數值和若恰好為3212，就可能是一種成功的堆疊。

考慮下面這個數值表，加以分析這81 種可能的組合可得

	甲	乙	丙	丁
A	101	101	1010	2000
B	1010	1100	200	1100
C	1001	11	11	11

# 81種組合列表

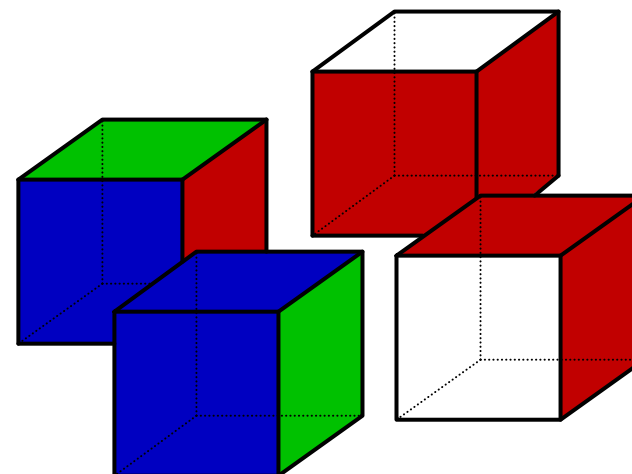
組 合	甲	乙	丙	丁	總和	
A甲A乙A丙A丁	101	101	1010	2000	3212	合
A甲A乙A丙B丁	101	101	1010	1100	2312	不合
A甲A乙A丙C丁	101	101	1010	11	1223	不合
A甲A乙B丙A丁	101	101	200	2000	2402	不合
A甲A乙B丙B丁	101	101	200	1100	1502	不合
A甲A乙B丙C丁	101	101	200	11	413	不合
A甲A乙C丙A丁	101	101	11	2000	2213	不合
A甲A乙C丙B丁	101	101	11	1100	1313	不合
A甲A乙C丙C丁	101	101	11	11	224	不合
A甲B乙A丙A丁	101	1100	1010	2000	4211	不合
A甲B乙A丙B丁	101	1100	1010	1100	3311	不合
A甲B乙A丙C丁	101	1100	1010	11	2222	不合
A甲B乙B丙A丁	101	1100	200	2000	3401	不合
A甲B乙B丙B丁	101	1100	200	1100	2501	不合
A甲B乙B丙C丁	101	1100	200	11	1412	不合
A甲B乙C丙A丁	101	1100	11	2000	3212	合
A甲B乙C丙B丁	101	1100	11	1100	2312	不合
A甲B乙C丙C丁	101	1100	11	11	1223	不合
A甲C乙A丙A丁	101	11	1010	2000	3122	不合
A甲C乙A丙B丁	101	11	1010	1100	2222	不合
A甲C乙A丙C丁	101	11	1010	11	1133	不合
A甲C乙B丙A丁	101	11	200	2000	2312	不合
A甲C乙B丙B丁	101	11	200	1100	1412	不合
A甲C乙B丙C丁	101	11	200	11	323	不合
A甲C乙C丙A丁	101	11	11	2000	2123	不合
A甲C乙C丙B丁	101	11	11	1100	1223	不合
A甲C乙C丙C丁	101	11	11	11	134	不合

組 合	甲	乙	丙	丁	總和	
B甲A乙A丙A丁	1010	101	1010	2000	4121	不合
B甲A乙A丙B丁	1010	101	1010	1100	3221	不合
B甲A乙A丙C丁	1010	101	1010	11	2132	不合
B甲A乙B丙A丁	1010	101	200	2000	3311	不合
B甲A乙B丙B丁	1010	101	200	1100	2411	不合
B甲A乙B丙C丁	1010	101	200	11	1322	不合
B甲A乙C丙A丁	1010	101	11	2000	3122	不合
B甲A乙C丙B丁	1010	101	11	1100	2222	不合
B甲A乙C丙C丁	1010	101	11	11	1133	不合
B甲B乙A丙A丁	1010	1100	1010	2000	5120	不合
B甲B乙A丙B丁	1010	1100	1010	1100	4220	不合
B甲B乙A丙C丁	1010	1100	1010	11	3131	不合
B甲B乙B丙A丁	1010	1100	200	2000	4310	不合
B甲B乙B丙B丁	1010	1100	200	1100	3410	不合
B甲B乙B丙C丁	1010	1100	200	11	2321	不合
B甲B乙C丙A丁	1010	1100	11	2000	4121	不合
B甲B乙C丙B丁	1010	1100	11	1100	3221	不合
B甲B乙C丙C丁	1010	1100	11	11	2132	不合
B甲C乙A丙A丁	1010	11	1010	2000	4031	不合
B甲C乙A丙B丁	1010	11	1010	1100	3131	不合
B甲C乙A丙C丁	1010	11	1010	11	2042	不合
B甲C乙B丙A丁	1010	11	200	2000	3221	不合
B甲C乙B丙B丁	1010	11	200	1100	2321	不合
B甲C乙B丙C丁	1010	11	200	11	1232	不合
B甲C乙C丙A丁	1010	11	11	2000	3032	不合
B甲C乙C丙B丁	1010	11	11	1100	2132	不合
B甲C乙C丙C丁	1010	11	11	11	1043	不合



# 81種組合列表

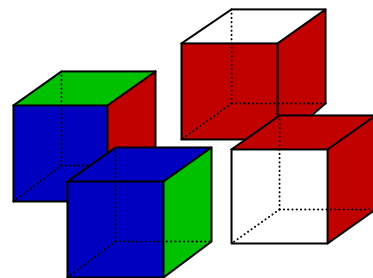
組合	甲	乙	丙	丁	總和	
C甲A乙A丙A丁	1001	101	1010	2000	4112	不合
C甲A乙A丙B丁	1001	101	1010	1100	3212	合
C甲A乙A丙C丁	1001	101	1010	11	2123	不合
C甲A乙B丙A丁	1001	101	200	2000	3302	不合
C甲A乙B丙B丁	1001	101	200	1100	2402	不合
C甲A乙B丙C丁	1001	101	200	11	1313	不合
C甲A乙C丙A丁	1001	101	11	2000	3113	不合
C甲A乙C丙B丁	1001	101	11	1100	2213	不合
C甲A乙C丙C丁	1001	101	11	11	1124	不合
C甲B乙A丙A丁	1001	1100	1010	2000	5111	不合
C甲B乙A丙B丁	1001	1100	1010	1100	4211	不合
C甲B乙A丙C丁	1001	1100	1010	11	3122	不合
C甲B乙B丙A丁	1001	1100	200	2000	4301	不合
C甲B乙B丙B丁	1001	1100	200	1100	3401	不合
C甲B乙B丙C丁	1001	1100	200	11	2312	不合
C甲B乙C丙A丁	1001	1100	11	2000	4112	不合
C甲B乙C丙B丁	1001	1100	11	1100	3212	合
C甲B乙C丙C丁	1001	1100	11	11	2123	不合
C甲C乙A丙A丁	1001	11	1010	2000	4022	不合
C甲C乙A丙B丁	1001	11	1010	1100	3122	不合
C甲C乙A丙C丁	1001	11	1010	11	2033	不合
C甲C乙B丙A丁	1001	11	200	2000	3212	合
C甲C乙B丙B丁	1001	11	200	1100	2312	不合
C甲C乙B丙C丁	1001	11	200	11	1223	不合
C甲C乙C丙A丁	1001	11	11	2000	3023	不合
C甲C乙C丙B丁	1001	11	11	1100	2123	不合
C甲C乙C丙C丁	1001	11	11	11	1034	不合



可能成功的組合：  
紅3 綠2 藍1 白2

# 成功的組合

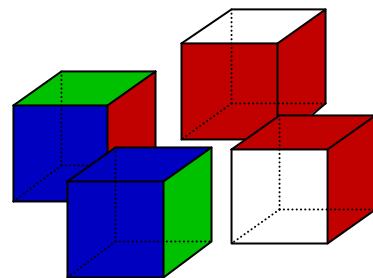
紅:1000, 綠:100, 藍:10, 白: 1



甲	乙	丙	丁
(白, 綠)	(綠, 白)	(藍, 紅)	(紅, 紅)
(白, 綠)	(紅, 綠)	(白, 藍)	(紅, 紅)
(白, 紅)	(綠, 白)	(藍, 紅)	(紅, 綠)
(白, 紅)	(紅, 綠)	(白, 藍)	(紅, 綠)
(白, 紅)	(白, 藍)	(綠, 綠)	(紅, 紅)

以這五種情形來說，一個成功的組合，長柱體積木的每一組對稱的側面，其數值和應該是2222。

# 成功的組合

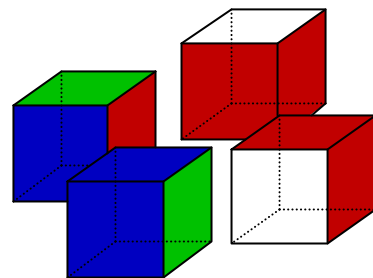


紅:1000, 綠:100, 藍:10, 白: 1

為了討論長方體柱側面的情形，我們將四個積木互相對應的側面數值和列表如下：

組別	甲	乙	丙	丁
	(A,B)	(C,D)	(E,F)	(G,H)
一	(1001,1010)	(1100,11)	(200,11)	(1100,11)
二	(1001,1010)	(101,11)	(200,1010)	(11,1100)
三	(101,1010)	(11,1100)	(200,11)	(11,2000)
四	(101,1010)	(101,11)	(200,1010)	(11,2000)
五	(101,1011)	(101,1100)	(11,1010)	(11,1100)

# 成功的組合



我們發現以第一組來說，四塊積木的側面數值分別為(1001, 1010)、(1100, 11)、(200, 11)、(1100, 11)，利用數狀圖分析可得

	組 合	側面和	側面和	結果
第一種	ACEG-BDFH	3401	1043	不合
	ACEH-BDFG	2312	2132	不合
	ACFG-BDEH	3212	1232	不合
	ACFH-BDEG	2123	2321	不合
	ADEG-BCFH	2312	2132	不合
	ADEH-BCFG	1223	3221	不合
	ADFG-BCEH	2123	2321	不合
	ADFH-BCEG	1034	3410	不合

# 成功的組合

以第二組來說，因為ABFH這四對數都超過1000，所以，AFH不在同一組合，BFH也不在同一組合。依此分析，其實我們可以利用這點降低操作的次數。

	組 合	側面和	側面和	結果		組 合	側面和	側面和	結果
第二種	ACEG-BDFH	1313	3131	不合	第三種	ACEG-BDFH	323	4121	不合
	ACEH-BDFG	2402	2042	不合		ACEH-BDFG	2312	2132	不合
	ACFG-BDEH	2123	2321	不合		ACFG-BDEH	134	4310	不合
	ACFH-BDEG	3212	1232	不合		ACFH-BDEG	2123	2321	不合
	ADEG-BCFH	1223	3221	不合		ADEG-BCFH	1412	3032	不合
	ADEH-BCFG	2312	2132	不合		ADEH-BCFG	3401	1043	不合
	ADFG-BCEH	2033	2411	不合		ADFG-BCEH	1223	3221	不合
	ADFH-BCEG	3122	1322	不合		ADFH-BCEG	3212	1232	不合
	組 合	側面和	側面和	結果		組 合	側面和	側面和	結果
第四種	ACEG-BDFH	413	4031	不合	第五種	ACEG-BDFH	224	4220	不合
	ACEH-BDFG	2402	2042	不合		ACEH-BDFG	1313	3131	不合
	ACFG-BDEH	1223	3221	不合		ACFG-BDEH	1223	3221	不合
	ACFH-BDEG	3212	1232	不合		ACFH-BDEG	2312	2132	不合
	ADEG-BCFH	323	4121	不合		ADEG-BCFH	1223	3221	不合
	ADEH-BCFG	2312	2132	不合		ADEH-BCFG	2312	2132	不合
	ADFG-BCEH	1133	3311	不合		ADFG-BCEH	2222	2222	合
	ADFH-BCEG	3122	1322	不合		ADFH-BCEG	3311	1133	不合



# 成功的組合

從上面分析中，這五種情形拿來作堆疊，發現只有第 5 種的一種組合

ADFG BCEH

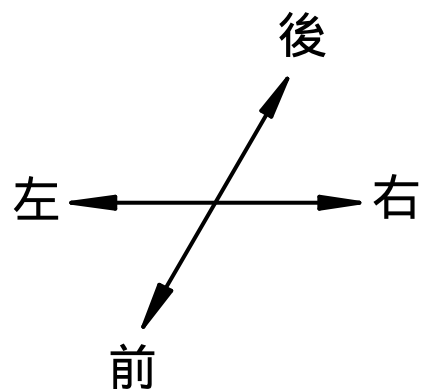
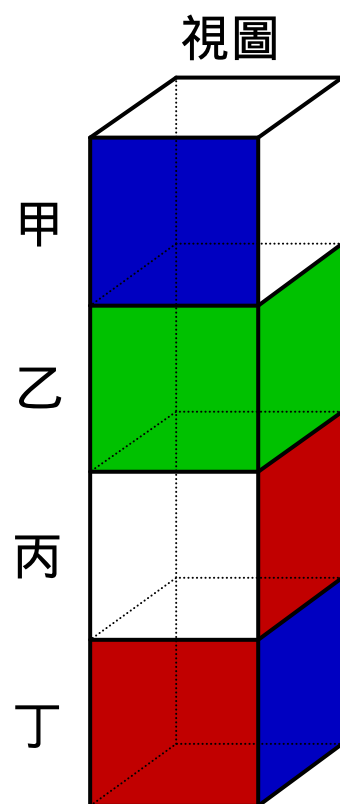
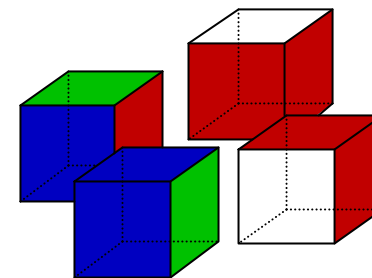
是合乎要求的。

$$ADFG=101+1100+1010+11=2222$$

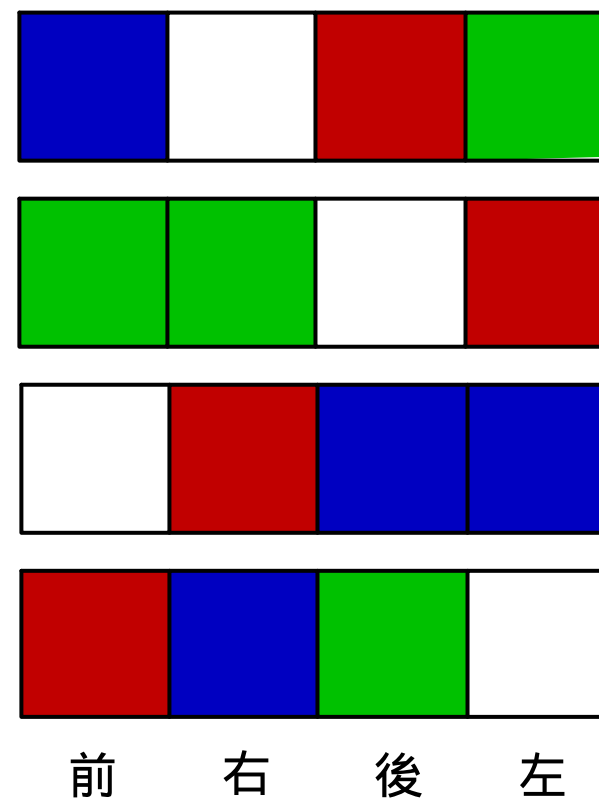
$$BCEH=1010+101+11+1100=2222$$

它的視圖如下：

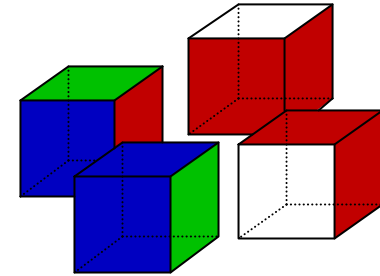
# 成功的組合



側面展開圖



# 四塊積木的啟示



利用“顏色 數據化分組法”所得到的結果恰巧與“逐一淘汰法”所得的一樣，但方法顯然快得多。因此善用觀察問題本身所得的性質，有助於我們解決問題。

縝密思考的確是解決問題的好方法，有條理的分析、簡化問題，不僅對解決疑難問題有助益，而且能更深入、全盤地了解問題。